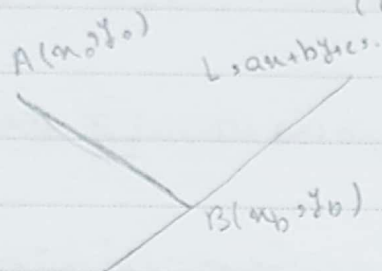


اثبات فرمول فاصله بین نقطه از خط

فرض $\leftarrow$ خط L به معادله $ax + by + c = 0$ داشته باشیم $(a, b \neq 0)$



علم $\leftarrow$ $|AB| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

برهان $\leftarrow$ فاصله $A(x_0, y_0)$ از خط یعنی پاره خط AB را بیابیم $\leftarrow$

پس شیب خط AB را m' و شیب خط L را $m = -\frac{a}{b}$ میگیریم

پس شیب خط AB را $m' = \frac{y_0 - y_b}{x_0 - x_b}$ میگیریم (۲)

با استفاده از قضیه

از (۱) و (۲) به $\frac{y_0 - y_b}{x_0 - x_b} = \frac{b}{a} \rightarrow a(y_0 - y_b) = b(x_0 - x_b)$

بنابراین از (۱) $a^2(y_0 - y_b)^2 + b^2(x_0 - x_b)^2 + 2ab(x_0 - x_b)(y_0 - y_b) = (a(x_0 - x_b) + b(y_0 - y_b))^2$ (۱)

و داریم $(a^2 + b^2)((x_0 - x_b)^2 + (y_0 - y_b)^2) = a^2(x_0 - x_b)^2 + a^2(y_0 - y_b)^2 + b^2(x_0 - x_b)^2 + b^2(y_0 - y_b)^2$

$+ 2ab(x_0 - x_b)(y_0 - y_b) = (a(x_0 - x_b) + b(y_0 - y_b))^2$ (۱)

$(a(x_0 - x_b) + b(y_0 - y_b))^2$

$a^2 + b^2$

حالا اگر از فرمول زیر بدیم

$$|AB| = \sqrt{(x_0 - x_b)^2 + (y_0 - y_b)^2}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 - (ax_b + by_b)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اما توجه کنید که $B(x_b, y_b)$ در معادله خط $ax + by + c = 0$ صدق می کند لذا $ax_b + by_b = -c$

بنابراین در صورت زیر در می آید

$$|AB| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله نقطه P از خط L با بردار هادی u برابر است با $\frac{|u \times \vec{P_0 P}|}{|u|}$ بدین ترتیب فاصله نقطه از خط L است

حال اگر خط معادله $L: ax + by + c = 0$ در نظر بگیریم در این صورت فاصله نقطه $P(x_0, y_0)$ از خط L با استفاده

از فرمول فوق بدست می آید و هم بردار هادی را با استفاده از فرمولی بد خط محور موثر می توان یافت که بدین صورت آورده

برای u با $(\frac{c}{b}, -\frac{c}{a})$ نقطه P_0 از خط L در نظر می گیریم بدین ترتیب محور موثر را می توانیم بدست آوریم که $P_0 = (-\frac{c}{a}, \frac{c}{b})$ است

لذا $P(x_0 + \frac{c}{a}, y_0 + \frac{c}{b})$ با استفاده از ضرب خارجی داریم که

$$u \times P_0 P = 0i + 0j + (-\frac{c}{a}y_0 - \frac{c}{b}x_0 - \frac{c^2}{ab})k, \quad d = \frac{|u \times P_0 P|}{|u|} = \frac{|\frac{c}{ab}(ax_0 + by_0 + c)|}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$A = (x_A, y_A)$$

$$ax + by + c = 0 \rightarrow m = \frac{-a}{b} \rightarrow m = \frac{b}{a} \rightarrow y - y_A = \frac{b}{a}(x - x_A)$$

$$ay - ay_A = b(x - x_A) \rightarrow ay - bx - ay_A + bx_A = 0$$

بافتح كل برصود حوت

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ay - bx - ay_A + bx_A = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^r x + b^r y + c = 0 \\ -ba^r y + b^r x + ba^r y_A - b^r x_A = 0 \end{cases}$$

$$a^r x + b^r y = -ac + ab^r y_A + b^r x_A \rightarrow x = \frac{-ac - ab^r y_A + b^r x_A}{a^r + b^r}$$

$$a \left(\frac{-ac - ab^r y_A + b^r x_A}{a^r + b^r} \right) + by + c = 0 \rightarrow \frac{-a^r c - a^r b^r y_A + ab^r x_A}{a^r + b^r} + by + c = 0$$

$$\rightarrow by = -c - \left(\frac{-a^r c - a^r b^r y_A + ab^r x_A}{a^r + b^r} \right) = \frac{-a^r c - b^r c + a^r c + a^r b^r y_A - ab^r x_A}{a^r + b^r}$$

$$y = \frac{-b^r c + a^r b^r y_A - ab^r x_A}{b(a^r + b^r)}$$

$$d = \sqrt{\left(x_A - \frac{-ac - ab^r y_A + b^r x_A}{a^r + b^r} \right)^2 + \left(y_A - \frac{-b^r c + a^r b^r y_A - ab^r x_A}{b(a^r + b^r)} \right)^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{a^r x_A + b^r x_A + ac + ab^r y_A - b^r x_A}{a^r + b^r} \right)^2 + \left(\frac{ba^r y_A + b^r y_A + b^r c - a^r b^r y_A + ab^r x_A}{b(a^r + b^r)} \right)^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{a(a^r x_A + b^r y_A + c)}{a^r + b^r} \right)^2 + \left(\frac{b^r(a^r x_A + b^r y_A + c)}{b(a^r + b^r)} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^r(a^r x_A + b^r y_A + c)^2}{a^r + b^r} + \frac{b^r(a^r x_A + b^r y_A + c)^2}{a^r + b^r}}$$

$$+ \frac{b^r(a^r x_A + b^r y_A + c)^2}{a^r + b^r} \rightarrow \sqrt{\frac{(a^r x_A + b^r y_A + c)^2}{(a^r + b^r)^2}} (a^r + b^r) = \sqrt{\frac{(a^r x_A + b^r y_A + c)^2}{a^r + b^r}}$$

$$\text{PAPCO} \rightarrow d = \frac{|a^r x_A + b^r y_A + c|}{\sqrt{a^r + b^r}}$$